

Mariusz Adamczak

Ciągi liczb całkowitych w ciągach określonych rekurencyjnie

Niniejszy artykuł dotyczy zastosowań pewnych zależności rekurencyjnych w zadaniach o liczbach całkowitych. Wykorzystuję w nim przede wszystkim liniowe równania rekurencyjne rzędu drugiego o współczynnikach stałych. Jednak pokazuję też w trzech przykładach stosowanie liniowych równań rekurencyjnych wyższych rzędów. Metody rozwiązywania równań rekurencyjnych są wprawdzie dobrze i szeroko opisane w literaturze, jednak poza ich przypomnieniem starałem się także pokazać jak od wzoru jawnego na dowolny wyraz ciągu przejść do zależności rekurencyjnej, co jest czasami przydatne w zadaniach olimpijskich. Mam nadzieję, że tekst ten może być gotowym konspektem zajęć z uczniami uzdolnionymi. Oznaczyłem zadania zaczerpnięte z różnych książek, które podałem na końcu. Niestety źródła zadania 9 nie potrafię już teraz ustalić.

Na początku przypomnijmy dwa twierdzenia, które pozwolą nam rozwiązywać liniowe równania rekurencyjne jednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach. W tych twierdzeniach rozpatrujemy ciągi (a_n) , które dla

dowolnej całkowitej nieujemnej liczby n określone są rekurencyjnie w następujący sposób

$$(*) \quad a_{n+2} = \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_2 a_n, \text{ gdzie } \alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0.$$

Taką właśnie zależność nazywamy liniowym równaniem rekurencyjnym jednorodnym rzędu drugiego.

Twierdzenie 1

Niech ciąg (a_n) określony jest równaniem rekurencyjnym (*). Wówczas dowolny wyraz tego ciągu wyraża się wzorem

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n,$$

jeżeli x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania charakterystycznego $x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0$, a c_1, c_2 są stałymi wyrażonymi przy pomocy x_1, x_2, a_0 i a_1 następującymi wzorami

$$c_1 = \frac{a_1 - a_0 x_2}{x_1 - x_2}, \quad c_2 = \frac{a_0 x_1 - a_1}{x_1 - x_2}.$$

Dowód

Zauważmy, że z założenia, że $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$ wynika, że $x_1 \cdot x_2 \neq 0$.

Dla $n = 0$ i $n = 1$ mamy

$$\begin{aligned} c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 &= c_1 + c_2 = \frac{a_1 - a_0 x_2}{x_1 - x_2} + \frac{a_0 x_1 - a_1}{x_1 - x_2} = a_0, \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 &= \frac{a_1 - a_0 x_2}{x_1 - x_2} x_1 + \frac{a_0 x_1 - a_1}{x_1 - x_2} x_2 = a_1. \end{aligned}$$

Załóżmy, że

$$a_{n-1} = c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1} \text{ oraz } a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n.$$

Ponadto z założenia, że x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0$ mamy

$$x_1^2 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 = 0 \quad \text{ i } \quad x_2^2 - \alpha_1 x_2 - \alpha_2 = 0.$$

Stąd

$$x_1^{n+1} - \alpha_1 x_1^n - \alpha_2 x_1^{n-1} = 0 \quad \text{ i } \quad x_2^{n+1} - \alpha_1 x_2^n - \alpha_2 x_2^{n-1} = 0,$$

więc

$$x_1^{n+1} = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_1^{n-1} \quad \text{ i } \quad x_2^{n+1} = \alpha_1 x_2^n + \alpha_2 x_2^{n-1}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha_1 a_n + \alpha_2 a_{n-1} = \alpha_1 (c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1}) + \alpha_2 (c_1 x_1^n + c_2 x_2^n) = \\ &= c_1 (\alpha_1 x_1^{n-1} + \alpha_2 x_1^n) + c_2 (\alpha_1 x_2^{n-1} + \alpha_2 x_2^n) = c_1 x_1^{n+1} + c_2 x_2^{n+1}. \end{aligned}$$

Na podstawie zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n .

Twierdzenie 2

Jeżeli równanie charakterystyczne $x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0$ ma jeden pierwiastek dwukrotny x_0 , to dowolny wyraz ciągu (a_n) określonego równaniem (*) wyraża się wzorem

$$a_n = c_1 x_0^n + c_2 n x_0^n,$$

gdzie c_1, c_2 są stałymi wyrażonymi przy pomocy x_0 i a_0 następującymi wzorami

$$c_1 = a_0, \quad c_2 = \frac{a_1 - a_0 x_0}{x_0}.$$

Dowód

Podobnie jak w poprzednim dowodzie łatwo zauważyć, że $x_0 \neq 0$.

Dla $n = 0$ i $n = 1$ mamy

$$\begin{aligned} c_1 x_0^0 + c_2 \cdot 0 \cdot x_0^0 &= c_1 = a_0, \\ c_1 x_0 + c_2 \cdot 1 \cdot x_0 &= a_0 x_0 + \frac{a_1 - a_0 x_0}{x_0} \cdot x_0 = a_1. \end{aligned}$$

Założmy, że

$$a_{n-1} = c_1 x_0^{n-1} + c_2 (n-1) x_0^{n-1} \quad \text{ oraz } \quad a_n = c_1 x_0^n + c_2 n x_0^n.$$

Mamy wówczas

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha_1 a_n + \alpha_2 a_{n-1} = \alpha_1 (c_1 x_0^n + c_2 n x_0^n) + \alpha_2 (c_1 x_0^{n-1} + c_2 (n-1) x_0^{n-1}) = \\ &= c_1 (\alpha_1 x_0^n + \alpha_2 x_0^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 n x_0^n + \alpha_2 (n-1) x_0^{n-1}) = c_1 x_0^{n+1} + c_2 (n+1) x_0^{n+1}. \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z równości

$$x_0^2 - \alpha_1 x_0 - \alpha_2 = 0 \quad \text{ i } \quad x_0 \cdot x_0 = -\alpha_2.$$

Stąd

$$nx_0^{n+1} = \alpha_1 nx_0^n + \alpha_2 nx_0^{n-1} \quad \text{i} \quad x_0^{n+1} = -\alpha_2 x_0^{n-1},$$

więc

$$(n+1)x_0^{n+1} = \alpha_1 n x_0^n + \alpha_2 (n-1)x_0^{n-1} \quad \text{i} \quad x_0^{n+1} = \alpha_1 x_0^n + \alpha_2 x_0^{n-1}.$$

Na podstawie zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n .

Pokażemy teraz jak te twierdzenia w łatwy sposób mogą być wykorzystywane w zadaniach.

Zadanie 1. ([4])

Niech ciągi (x_n) i (y_n) są określone rekurencyjnie w następujący sposób

$$x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}, x_0 = 0, x_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}, y_0 = 1, y_1 = 2.$$

Udowodnić, że $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$ dla każdej całkowitej nieujemnej liczby n .

Rozwiązanie

Zauważmy, że ciągi (x_n) i (y_n) dane są tymi samymi równaniami rekurencyjnymi liniowymi rzędu drugiego (różnią się tylko warunkami początkowymi), a więc mają to samo równanie charakterystyczne

$$x^2 - 4x + 1 = 0,$$

którego pierwiastkami są $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ i $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. Wobec tego

$$x_n = c_1(2 - \sqrt{3})^n + c_2(2 + \sqrt{3})^n \quad \text{oraz} \quad y_n = d_1(2 - \sqrt{3})^n + d_2(2 + \sqrt{3})^n.$$

Stąd

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1(2 - \sqrt{3}) + c_2(2 + \sqrt{3}) = 1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} d_1 + d_2 = 1 \\ d_1(2 - \sqrt{3}) + d_2(2 + \sqrt{3}) = 2. \end{cases}$$

Rozwiązując powyższe układy otrzymujemy

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})^n - \frac{1}{2\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^n \quad \text{oraz} \quad y_n = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})^n + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^n.$$

Wykonując teraz proste przekształcenia łatwo wykazujemy, że dla dowolnego całkowitego $n \geq 0$ mamy

$$\begin{aligned} 3x_n^2 + 1 &= 3 \cdot \frac{1}{12} \left((2 + \sqrt{3})^{2n} - 2 + (2 - \sqrt{3})^{2n} \right) + 1 = \\ &= \frac{1}{4} \left((2 + \sqrt{3})^{2n} + 2 + (2 - \sqrt{3})^{2n} \right) = y_n^2. \end{aligned}$$

Zadanie 2.

Ciągi (a_n) i (b_n) określone są następująco

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 1, a_1 = 5 \text{ oraz } b_{n+2} = -2b_{n+1} - b_n, \quad b_0 = -1, b_1 = 3.$$

Udowodnić, że wszystkie wyrazy ciągu $c_n = a_n + b_n$ są podzielne przez 4.

Rozwiązanie

Zauważmy, że ciągi (a_n) i (b_n) opisane są równaniami rekurencyjnymi rzędu drugiego. Stosując poznaną metodę możemy łatwo ustalić, że

$$a_n = 4n + 1 \text{ oraz } b_n = (2n + 1) \cdot (-1)^{n+1}.$$

Stąd

$$c_n = a_n + b_n = 4n + (2n + 1) \cdot (-1)^{n+1}.$$

Wobec tego dla dowolnej całkowitej nieujemnej liczby k mamy

$$c_{2k} = a_{2k} + b_{2k} = 8k + 1 + (4k + 1) \cdot (-1) = 4k,$$

$$c_{2k+1} = a_{2k+1} + b_{2k+1} = 8k + 4 + 1 + (4k + 3) \cdot 1 = 12k + 8 = 4(3k + 2).$$

Zatem wszystkie wyrazy ciągu (c_n) są podzielne przez 4.

Następne dwa zadania pozostawiamy jako ćwiczenie do rozwiązania Czytelnikowi.

Zadanie 3.

Ciąg (a_n) określony jest następująco

$$a_0 = -1, a_1 = 1 \text{ oraz } a_{n+2} = \frac{5a_{n+1} - a_n}{6} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wykazać dowolny wyraz tego ciągu wyraża się wzorem $a_n = 2^{3-n} - 3^{2-n}$.

Zadanie 4.

Znaleźć wzór jawny na dowolny wyraz ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie

$$a_0 = 16, a_1 = 2 \text{ oraz } a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{16}a_n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Teraz odwróćmy problem. Pokażemy w jaki sposób ze wzoru jawnego na dowolny wyraz ciągu otrzymać zależność rekurencyjną.

Zadanie 5.

Wykazać, że dla dowolnej całkowitej liczby nieujemnej n wyrażenie

$$\frac{(6 - \sqrt{6})(2 - \sqrt{6})^n + (6 + \sqrt{6})(2 + \sqrt{6})^n}{6}$$

jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie

Niech

$$(1) \quad a_n = \frac{6 - \sqrt{6}}{6}(2 - \sqrt{6})^n + \frac{6 + \sqrt{6}}{6}(2 + \sqrt{6})^n.$$

Ułóżmy równanie kwadratowe, którego pierwiastkami będą liczby

$$x_1 = 2 - \sqrt{6} \text{ oraz } x_2 = 2 + \sqrt{6}.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= 0, \\ x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 &= 0, \\ x^2 - 4x - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Wobec tego ostatnie równanie możemy traktować jako równanie charakterystyczne równania rekurencyjnego

$$(2) \quad a_n = 4a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ dla } n \geq 2.$$

Stąd wzór na dowolny wyraz tego ciągu ma postać

$$(3) \quad a_n = c_1(2 - \sqrt{6})^n + c_2(2 + \sqrt{6})^n.$$

Ale z (1) mamy $a_0 = 2$ i $a_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{6}(2-\sqrt{6}) + \frac{6+\sqrt{6}}{6}(2+\sqrt{6}) = 6$.

Natomiast z (3) dostajemy

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1(2-\sqrt{6}) + c_2(2+\sqrt{6}) = 6. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy $c_1 = \frac{6+\sqrt{6}}{6}$ oraz $c_2 = \frac{6-\sqrt{6}}{6}$.

Wobec tego

$$a_n = \frac{6-\sqrt{6}}{6}(2-\sqrt{6})^n + \frac{6+\sqrt{6}}{6}(2+\sqrt{6})^n.$$

Okazało się, że ciąg opisany równaniem rekurencyjnym (2) ma wzór ogólny (1).

Zatem ciąg (a_n) składa się z liczb całkowitych, ponieważ

$$\begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 6, \\ a_n = 4a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ dla } n \geq 2, \end{cases}$$

co można łatwo udowodnić formalnie przy pomocy zasady indukcji matematycznej.

Zadanie 6.

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{3\sqrt{7}-1}{2\sqrt{7}}(2-\sqrt{7})^n + \frac{3\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}}(2+\sqrt{7})^n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że $4|a_{2021} + a_{2022}$.

Rozwiązanie

Stosując metodę przedstawioną w rozwiązaniu zadania 5 możemy pokazać, że ciąg (a_n) może być opisany rekurencyjnie następująco

$$\begin{cases} a_0 = 3, a_1 = 7, \\ a_n = 4a_{n-1} + 3a_{n-2} \text{ dla } n \geq 2. \end{cases}$$

Wobec tego wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są naturalne. Ponadto

$$\begin{aligned} a_n = 4a_{n-1} + 3a_{n-2} &= 4a_{n-1} + 3(4a_{n-3} + 3a_{n-4}) = 4a_{n-1} + 12a_{n-3} + 9a_{n-4} = \\ &= 4a_{n-1} + 12a_{n-3} + 8a_{n-4} + a_{n-4} = 4(a_{n-1} + 3a_{n-3} + 2a_{n-4}) + a_{n-4}. \end{aligned}$$

Stąd mamy

$$a_n \equiv p \pmod{4} \Leftrightarrow a_{n-4} \equiv p \pmod{4},$$

więc $a_{2021} = a_{4 \cdot 505 + 1} \equiv a_1 \pmod{4}$ oraz $a_{2022} = a_{4 \cdot 505 + 2} \equiv a_2 \pmod{4}$.

Zatem

$$a_{2021} + a_{2022} \equiv a_1 + a_2 \pmod{4} = 7 + 37 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Zadanie 7.

Ciąg (a_n) dany jest wzorem

$$a_n = \frac{(-5 - \sqrt{17})(3 - \sqrt{17})^n + (5 - \sqrt{17})(3 + \sqrt{17})^n}{2^{n+1} \cdot \sqrt{17}} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Które wyrazy ciągu (a_n) są podzielne przez 5?

Rozwiązanie

Zapiszmy wzór na dowolny wyraz ciągu (a_n) w postaci

$$a_n = \left(\frac{-5 - \sqrt{17}}{2\sqrt{17}} \right) \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right)^n + \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2\sqrt{17}} \right) \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right)^n.$$

Rozpatrzmy równanie kwadratowe $x^2 - 3x - 2 = 0$, którego pierwiastkami są liczby $x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ i $x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$. Stąd ciąg (a_n) może być określony jest następująco

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Z powyższej zależności rekurencyjnej wszystkie wyrazy ciągu są całkowite oraz łatwo otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 3(3a_{n-2} + 2a_{n-3}) + 2(3a_{n-3} + 2a_{n-4}) = \\ &= 9a_{n-2} + 12a_{n-3} + 4a_{n-4} = \\ &= 9(3a_{n-3} + 2a_{n-4}) + 12(3a_{n-4} + 2a_{n-5}) + 4(3a_{n-5} + 2a_{n-6}) = \\ &= 27a_{n-3} + 54a_{n-4} + 36a_{n-5} + 8a_{n-6} = \\ &= 27(3a_{n-4} + 2a_{n-5}) + 54a_{n-4} + 36a_{n-5} + 8a_{n-6} = \\ &= 135a_{n-4} + 90a_{n-5} + 5a_{n-6} + 3a_{n-6}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$5 \mid a_n \Leftrightarrow 5 \mid 3a_{n-6} \Leftrightarrow 5 \mid a_{n-6}.$$

Ponieważ $a_3 = 5$, więc wszystkie wyrazy a_{6k+3} dla $k = 0, 1, 2, \dots$ są podzielne przez 5.

Zadanie 8.

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{5}{\sqrt{13}} \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right)^n - \frac{5}{\sqrt{13}} \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right)^n - 1 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że

$$5 \mid \sum_{i=0}^{5k-1} a_i \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

Rozwiązanie

Niech $a_n = b_n - 1$, gdzie $b_n = \frac{5}{\sqrt{13}} \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right)^n - \frac{5}{\sqrt{13}} \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right)^n$.

Ułóżmy równanie kwadratowe, którego pierwiastkami będą liczby $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$

i $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$. Mamy więc równanie charakterystyczne $x^2 - 5x + 3 = 0$, które jest związane równaniem rekurencyjnym $b_n = 5b_{n-1} - 3b_{n-2}$.

Wówczas $a_n + 1 = 5(a_{n-1} + 1) - 3(a_{n-2} + 1)$.

Wobec tego ciąg a_n można opisać rekurencyjnie następująco

$$a_0 = -1, a_1 = 4 \text{ oraz } a_n = 5a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 \text{ dla } n \geq 2.$$

Zauważmy, że

$$a_0 \equiv 4 \pmod{5} \text{ oraz } a_1 \equiv 4 \pmod{5}.$$

Założmy, że

$$a_{n-1} \equiv 4 \pmod{5} \text{ oraz } a_n \equiv 4 \pmod{5}.$$

Wówczas

$$a_{n+1} = 5a_n - 3a_{n-1} + 1 \equiv 5 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + 1 \pmod{5} \equiv 4 \pmod{5}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej otrzymujemy, że dowolny wyraz ciągu (a_n) przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4. Zatem

$$\sum_{i=0}^{5k-1} a_i \equiv 5k \cdot 4 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Uwaga

Tezę tego zadania można oczywiście łatwo uogólnić. A mianowicie dla $k = 0, 1, 2, \dots$ oraz $l = 1, 2, 3, \dots$ również i suma

$$\sum_{i=k}^{5l+(k-1)} a_i$$

jest podzielna przez 5.

W następnym zadaniu pokażemy jak sobie radzić, gdy dane równanie rekurencyjne nie jest jednorodne.

Zadanie 9.

Niech ciąg (a_n) będzie dany wzorami

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ oraz } a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2 \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Udowodnić, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są kwadratami pewnych liczb naturalnych.

Rozwiązanie

Chcemy sprowadzić równanie rekurencyjne niejednorodne $a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2$ do równania jednorodnego $b_{n+2} = c_1 b_{n+1} + c_2 b_n$.

Podstawiając za $a_n = b_n + \alpha$ mamy

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2 = 7(b_{n+1} + \alpha) - (b_n + \alpha) - 2 = 7b_{n+1} - b_n + 6\alpha - 2.$$

Stąd

$$b_{n+2} + \alpha = 7b_{n+1} - b_n + 6\alpha - 2,$$

więc

$$b_{n+2} = 7b_{n+1} - b_n + 5\alpha - 2.$$

Aby więc ostatnie równanie było jednorodne wystarczy podstawić wystarczy podstawić $\alpha = \frac{2}{5}$. Otrzymaliśmy więc, że

$$a_n = b_n + \frac{2}{5} \text{ oraz } b_{n+2} = 7b_{n+1} - b_n.$$

Dalej postępujemy standardowo. Równanie charakterystyczne ma postać $x^2 - 7x + 1 = 0$. Wówczas

$$b_n = c_1 \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Dla uproszczenia dalszych obliczeń uzupełnijmy nasz ciąg (b_n) wyrazem zero-
wym

$$b_0 = 7b_1 - b_2 = 7 \left(a_1 - \frac{2}{5} \right) - \left(a_2 - \frac{2}{5} \right) = \frac{18}{5}.$$

Stąd otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{18}{5} \\ c_1 \cdot \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{5}, \end{cases}$$

z którego dostajemy $c_1 = \frac{9+4\sqrt{5}}{5}$ i $c_2 = \frac{9-4\sqrt{5}}{5}$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{9 + 4\sqrt{5}}{5} \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{9 - 4\sqrt{5}}{5} \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{2}{5} = \\ &= \left(\sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{\left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \right)^n} + \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right)^2. \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, bo podwojony iloczyn pierwszego i drugiego wyrażenia jest równy

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{\left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \right)^n} \cdot \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \right)^n} &= \\ &= \frac{2}{5} \cdot \sqrt{81 - 80} \cdot \left(\sqrt{\frac{49 - 45}{4}} \right)^n = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Musimy jeszcze udowodnić, że liczby

$$t_n = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n} + \sqrt{\frac{9-4\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

są całkowite dla dowolnej całkowitej nieujemnej liczby n . Wystarczy zastosować metodę z zadania 5 przyjmując

$$c_1 = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+2)^2}{5}} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \text{ i } c_2 = \sqrt{\frac{9-4\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{5}} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}$$

oraz

$$x_1 = \sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{14-6\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ i } x_2 = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Stąd równanie charakterystyczne ma postać $x^2 - 3x + 1 = 0$, dzięki któremu liczby b_n mogą być opisane rekurencyjnie następująco

$$\begin{cases} t_0 = 2, t_1 = 1, \\ t_n = 3t_{n-1} - t_{n-2} \text{ dla } n \geq 2. \end{cases}$$

Wobec tego łatwo stwierdzamy, że liczby t_n są całkowite.

W następnych trzech przykładach pokażemy, że metoda rozwiązywania jednorodnych liniowych równań rekurencyjnych rzędu drugiego może być uogólniona do jednorodnych równań rekurencyjnych liniowych wyższych rzędów o stałych współczynnikach.

Zadanie 10.

Znaleźć wzór na dowolny wyraz ciągu określonego następująco

$$\begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 16, a_3 = -10, \\ a_{n+3} + 2a_{n+2} - 5a_{n+1} - 6a_n = 0 \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne naszego jednorodnego równania rekurencyjnego rzędu trzeciego ma postać $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$. Pierwiastkami tego równania są

$$x_1 = -1, x_2 = 2 \text{ i } x_3 = -3.$$

Stąd

$$a_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot (-3)^n.$$

Wykorzystując trzy pierwsze wyrazy ciągu (a_n) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} -c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 2 \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 16 \\ -c_1 + 8c_2 - 27c_3 = -10, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest trójka liczb $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 2, 1)$.

Zatem

$$a_n = (-1)^{n+1} + 2^{n+1} + (-3)^n.$$

Ponieważ nie podaliśmy wcześniej odpowiedniego twierdzenia, które pozwalałoby nam na powyższe postępowanie, udowodnimy więc otrzymany wzór indukcyjnie.

Dla $n = 1, n = 2$ i $n = 3$ mamy odpowiednio

$$a_1 = 1 + 4 - 3 = 2, a_2 = -1 + 8 + 9 = 16, a_3 = 1 + 16 - 27 = -10.$$

Założmy, że

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^{n+1} + 2^{n+1} + (-3)^n, \\ a_{n+1} &= (-1)^{n+2} + 2^{n+2} + (-3)^{n+1}, \\ a_{n+2} &= (-1)^{n+3} + 2^{n+3} + (-3)^{n+2}. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= -2a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = -2 \cdot (-1)^{n+3} - 2 \cdot 2^{n+3} - 2 \cdot (-3)^{n+2} + \\ &+ 5 \cdot (-1)^{n+2} + 5 \cdot 2^{n+2} + 5 \cdot (-3)^{n+1} + 6 \cdot (-1)^{n+1} + 6 \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot (-3)^n = \\ &= (-1)^{n+1}(6 + 5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1)^2) + 2^{n+1}(6 + 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2) + \\ &+ (-3)^n(6 + 5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3)) = (-1)^{n+4} + 2^{n+4} + (-3)^{n+3}. \end{aligned}$$

Stąd na podstawie zasady indukcji matematycznej wzór na dowolny wyraz ciągu (a_n) jest prawdziwy dla dowolnej całkowitej nieujemnej liczby n .

Zadanie 11.

Wykazać, że wszystkie wyrazy ciągu

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 9, a_3 = 49, \\ a_{n+3} = 7a_{n+2} - 14a_{n+1} + 8a_n \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

są kwadratami pewnych liczb nieparzystych.

Rozwiązanie

Utwórzmy równanie charakterystyczne o postaci $x^3 = 7x^2 - 14x + 8$, którego pierwiastkami są 4, 2 i 1. Stąd

$$a_n = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot 1^n.$$

Mając dane pierwsze trzy wyrazy łatwo obliczymy, że $c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 1$.

Wobec tego

$$a_n = 4^n - 2 \cdot 2^n + 1 = (2^n - 1)^2.$$

Zadanie 12.

Udowodnić, że wszystkie wyrazy ciągu

$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{5})(-1 - \sqrt{5})^n + (1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5})^n + (2n + 4)(-2)^n}{2^{n+1}}$$

są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie

Przekształćmy wzór na dowolny wyraz ciągu (a_n) do postaci, która zasugeruje równanie charakterystyczne. A mianowicie

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(1 - \sqrt{5})(-1 - \sqrt{5})^n + (1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5})^n + (2n + 4)(-2)^n}{2^{n+1}} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + (n + 2)(-1)^n = \\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + 2 \cdot (-1)^n + n \cdot (-1)^n. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 x_3^n + n \cdot c_4 x_3^n,$$

gdzie

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_3 = x_4 = -1, c_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, c_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, c_3 = 2, c_4 = 1.$$

Wobec tego równanie charakterystyczne będzie miało postać

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)^2 = 0,$$

czyli

$$(x^2 + x - 1)(x + 1)^2 = 0$$

i ostatecznie

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0.$$

Zatem ciąg (a_n) może być określony rekurencyjnie następująco

$$\begin{cases} a_0 = 3, & a_1 = 0, & a_2 = 4, & a_3 = -2, \\ a_{n+4} = -3a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_{n+1} + a_n. \end{cases}$$

Stąd przez łatwą indukcję łatwo wnioskujemy, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są całkowite.

Na koniec rozwiążmy kilka zadań olimpijskich.

Zadanie 13. ([1])

Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej k istnieje całkowita dodatnia liczba n_k taka, że

$$(1) \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})^k = \sqrt{n_k} - \sqrt{n_k - 1}.$$

Rozwiązanie

Z danej równości (1) wynika, że

$$\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^k (\sqrt{3} + \sqrt{2})^k}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^k} = \frac{(\sqrt{n_k} - \sqrt{n_k - 1})(\sqrt{n_k} + \sqrt{n_k - 1})}{\sqrt{n_k} + \sqrt{n_k - 1}},$$

$$\frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^k} = \frac{1}{\sqrt{n_k} + \sqrt{n_k - 1}},$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^k = \sqrt{n_k} + \sqrt{n_k - 1}.$$

Dodając stronami równości (1) i (2) otrzymujemy

$$\sqrt{n_k} = \frac{1}{2} \left((\sqrt{3} - \sqrt{2})^k + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^k \right),$$

skąd

$$n_k = \frac{1}{4} \left((5 - 2\sqrt{6})^k + 2 + (5 + 2\sqrt{6})^k \right).$$

Aby udowodnić, że liczby $\frac{1}{4} \left((5 - 2\sqrt{6})^k + 2 + (5 + 2\sqrt{6})^k \right)$ są całkowite dla każdej całkowitej nieujemnej liczby k , wystarczy wykazać, że liczby $(5 - 2\sqrt{6})^k + (5 + 2\sqrt{6})^k$ przy dzieleniu przez 4 dają resztę 2.

Niech $a_k = (5 - 2\sqrt{6})^k + (5 + 2\sqrt{6})^k$.

Wówczas równanie charakterystyczne $x^2 - 10x + 1 = 0$ prowadzi nas do rekurencji

$$\begin{cases} a_0 = 2, a_1 = 10, \\ a_{k+2} = 10a_{k+1} - a_k, \end{cases}$$

z której wynika, że wszystkie wyrazy ciągu (a_k) są całkowite.

Wykażemy indukcyjnie, że $a_k \equiv 2 \pmod{4}$.

Dla $k = 0$ i $k = 1$ teza jest oczywista.

Założmy teraz, że $a_k \equiv 2 \pmod{4}$ oraz $a_{k+1} \equiv 2 \pmod{4}$.

Wówczas $a_{k+2} = 10a_{k+1} - a_k \equiv 10 \cdot 2 - 2 \pmod{4} = 18 \equiv 2 \pmod{4}$.

Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej liczby $a_k = (5 - 2\sqrt{6})^k + (5 + 2\sqrt{6})^k$ dają resztę 2 przy dzieleniu przez 4, skąd bezpośrednio wynika teza zadania.

Zadanie 14. ([1])

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że

$$\left\lfloor \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{4n-2} \right\rfloor - 1$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Rozważmy ciąg

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n} \cdot \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n} \cdot \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{3+\sqrt{5}} + \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{3-\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Stosując naszą metodę otrzymujemy, że ciąg (a_n) może być określony rekurencyjnie w następujący sposób

$$\begin{cases} a_0 = 3, a_1 = 3, \\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n. \end{cases}$$

Wobec tego wyrazy ciągu (a_n) są całkowite.

Zauważmy ponadto, że

$$0 < \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} < 1.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} - 1 &< \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} \\ &+ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2}, \end{aligned}$$

czyli

$$a_n - 1 < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} < a_n.$$

Stąd

$$\left\lfloor \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} \right\rfloor = a_n - 1,$$

więc

$$\left\lfloor \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{4n-2} \right\rfloor - 1 = a_n - 2.$$

I teraz już łatwo zauważyć, że

$$a_n - 2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{4n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{4n-2} - 2 = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-1} \right)^2.$$

Musimy jeszcze pokazać, że liczby

$$b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-1}$$

są całkowite.

Po raz kolejny zastosujemy naszą metodę. A mianowicie mamy $b_0 = -1, b_1 = 1$.

Przekształćmy wzór na b_n do postaci, z której łatwo utworzymy równanie charakterystyczne.

$$\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \cdot \frac{2}{1-\sqrt{5}} = \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{2}{1-\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Stąd równanie charakterystyczne ma postać

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Wobec tego ciąg (b_n) spełnia następującą zależność rekurencyjną

$$\begin{cases} b_0 = -1, b_1 = 1, \\ b_{n+2} = 3b_{n+1} - b_n, \end{cases}$$

z której w oczywisty sposób wynika, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są całkowite.

Zadanie 15. (na podstawie zadania 311 z [3])

Ciąg (a_n) określony jest następująco

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} + 2a_n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że dla $n \geq 4$

$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \right\rfloor.$$

Rozwiązanie

Z równania charakterystycznego $x^2 - 5x - 2 = 0$ o pierwiastkach $x_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ otrzymujemy $a_n = c_1 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)^n$, skąd $c_1 = \frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}$ i $c_2 = \frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}$. Stąd mamy

$$x_1 x_2 = -2, \quad x_1 + x_2 = 5, \quad c_1 c_2 = \frac{8}{33}.$$

Obliczmy różnicę

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} &= \frac{a_{n+1} a_{n-1} - a_n^2}{a_{n-1}} \\ &= \frac{(c_1 x_1^{n+1} + c_2 x_2^{n+1})(c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1}) - (c_1 x_1^n + c_2 x_2^n)^2}{a_{n-1}} = \\ &= \frac{c_1 c_2 x_1^n x_2^n x_1 x_2^{-1} + c_1 c_2 x_1^n x_2^n x_1^{-1} x_2 - 2c_1 c_2 x_1^n x_2^n}{a_{n-1}} = \frac{c_1 c_2 ((x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2)}{x_1 x_2 a_{n-1}} \\ &= \frac{-4}{a_{n-1}}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$a_{n+1} + \frac{4}{a_{n-1}} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}}.$$

Zauważmy, że $0 < \frac{4}{a_{n-1}} < 1$ dla $n \geq 4$. Ponadto a_{n+1} jest liczbą całkowitą, więc

$$\left\lfloor \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \right\rfloor = \left\lfloor a_{n+1} + \frac{4}{a_{n-1}} \right\rfloor = a_{n+1}.$$

W następnym przykładzie nie od razu będzie oczywiste, jak zauważyć i wykorzystać liniowe równanie rekurencyjne rzędu drugiego.

Zadanie 16. ([3])

Ciąg (a_n) określony jest następująco

$$a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{5}{2}, \quad a_{n+1} = a_n(a_{n-1}^2 - 2) - a_1 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że dla $n \geq 1$

$$\lfloor a_n \rfloor = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$

Rozwiązanie

Obliczmy kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 = 1 + \frac{1}{1}, & a_1 &= \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}, & a_2 &= \frac{65}{8} = 8 + \frac{1}{8}, \\ a_3 &= \frac{1025}{32} = 32 + \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Te wyniki mogą sugerować, że $a_n = 2^{x_n} + 2^{-x_n}$ dla pewnych całkowitych liczb x_n . Stąd

$$\begin{aligned} 2^{x_{n+1}} + 2^{-x_{n+1}} &= a_{n+1} = a_n(a_{n-1}^2 - 2) - a_1 = \\ &= (2^{x_n} + 2^{-x_n})((2^{x_{n-1}} + 2^{-x_{n-1}})^2 - 2) - 2^{x_1} - 2^{-x_1} = \\ &= (2^{x_n} + 2^{-x_n})(2^{2x_{n-1}} + 2^{-2x_{n-1}}) - 2^{x_1} - 2^{-x_1} = \\ &= 2^{x_n+2x_{n-1}} + 2^{-x_n-2x_{n-1}} + 2^{x_n-2x_{n-1}} + 2^{-x_n+2x_{n-1}} - 2^{x_1} - 2^{-x_1}. \end{aligned}$$

Wobec tego chcielibyśmy, aby liczby x_n spełniały warunki

$$x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} \quad \text{oraz} \quad x_n - 2x_{n-1} = \pm x_1 \quad \text{oraz} \quad x_0 = 0, x_1 = 1.$$

I tu właśnie pojawiła się liniowa zależność rekurencyjna rzędu drugiego. Mamy więc równanie charakterystyczne $x^2 - x - 2 = 0$ o pierwiastkach -1 i 2 . Stąd

$$x_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n.$$

Zatem

$$\lfloor a_n \rfloor = \lfloor 2^{x_n} + 2^{-x_n} \rfloor = \lfloor 2^{x_n} \rfloor = \left\lfloor 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} \right\rfloor = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$

Zadanie 17. (na podstawie zadania 753 z [3])

Ciąg (a_n) dany jest wzorem

$$a_n = \frac{(13 + \sqrt{13})(3 - \sqrt{13})^n + (13 - \sqrt{13})(3 + \sqrt{13})^n}{13 \cdot 2^n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Czy istnieją takie liczby całkowite nieujemne p, q i r , dla których $a_p \cdot a_q = a_r$?

Rozwiązanie

Zapiszmy wzór na dowolny wyraz ciągu (a_n) w postaci

$$a_n = \left(\frac{13 + \sqrt{13}}{13}\right) \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)^n + \left(\frac{13 - \sqrt{13}}{13}\right) \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)^n,$$

która sugeruje, że pierwiastkami równania charakterystycznego będą liczby $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ i $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Wobec tego równanie kwadratowe $x^2 - 3x - 1 = 0$ prowadzi nas do rekurencji

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Stąd łatwo wnioskujemy, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są całkowite. Pokażemy indukcyjnie, że każdy wyraz przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Oczywiście dwa pierwsze wyrazy mają tę własność. Załóżmy, że $a_n \equiv 2 \pmod{3}$ i $a_{n+1} \equiv 2 \pmod{3}$. Wówczas także $a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n \equiv 2 \pmod{3}$.

Wówczas jeżeli istniałyby liczby całkowite nieujemne p, q i r takie, że $a_p \cdot a_q = a_r$, to $a_p \cdot a_q \equiv 2 \cdot 2 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$, a $a_r \equiv 2 \pmod{3}$. Wobec tego takie liczby nie istnieją.

Zadanie 18. (na podstawie 59 OM/I/3)

Ciąg (a_n) dany jest wzorem

$$a_n = \frac{(29 - \sqrt{29})(3 - \sqrt{29})^n + (29 + \sqrt{29})(3 + \sqrt{29})^n}{29 \cdot 2^{n+1}} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $k \geq 2$, że liczba a_k jest dzielnikiem iloczynu $a_{k+1}a_{k+2}$?

Rozwiązanie

Zapisując wzór na dowolny wyraz ciągu (a_n) w postaci

$$a_n = \left(\frac{29 - \sqrt{29}}{58} \right) \left(\frac{3 - \sqrt{29}}{2} \right)^n + \left(\frac{29 + \sqrt{29}}{58} \right) \left(\frac{3 + \sqrt{29}}{2} \right)^n,$$

otrzymujemy rekurencję

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} + 5a_n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wykażemy (analogicznie jak w zadaniu 7), że żaden wyraz ciągu nie jest podzielny ani przez 3 ani przez 5.

Dla $n = 0$ i $n = 1$ teza jest oczywista.

Zauważmy, że jeżeli $a_n \not\equiv 0 \pmod{3}$, to

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 5a_n \equiv 5a_n \pmod{3} \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

I analogicznie jeżeli $a_{n+1} \not\equiv 0 \pmod{5}$, to

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 5a_n \equiv 3a_{n+1} \pmod{5} \not\equiv 0 \pmod{5}.$$

Wobec tego z zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że żaden wyraz ciągu nie jest podzielny przez 3 i nie jest podzielny przez 5.

Założmy, że istnieje taka liczba $k \geq 2$, że $a_k | a_{k+1} a_{k+2}$.

Z zależności rekurencyjnej $a_{k+2} = 3a_{k+1} + 5a_k$ mamy $a_{k+1} a_{k+2} = 3a_{k+1}^2 + 5a_k a_{k+1}$. Stąd $a_k | a_{k+1}^2$. Ponieważ $a_k \geq 2$, więc istnieje taka liczba pierwsza p (różna od 3 i 5), że $p | a_k$ i $p | a_{k+1}$. Założmy, że k jest najmniejszą taką liczbą.

Wówczas z rekurencji $5a_{k-1} = a_{k+1} - 3a_k$ wynika, że $p | a_{k-1}$, co jest sprzeczne z tym, że k miała być najmniejszą liczbą, dla której dwa sąsiednie wyrazy dzielą się przez p .

Zatem nie istnieje taka liczba k , dla której $a_k | a_{k+1} a_{k+2}$.

W następnym zadaniu przypomnimy klasyczne zagadnienie łączące bardzo znany ciąg z jeszcze słynniejszą liczbą.

Zadanie 19.

Ciąg (f_n) zdefiniowany jest następująco

$$\begin{cases} f_0 = 0, & f_1 = 1, \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n & \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}.$$

Rozwiązanie

Wykorzystując równanie $x^2 = x + 1$ otrzymujemy wzór na dowolny wyraz ciągu (f_n)

$$(1) \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n} = \\ &= \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot (1 + \sqrt{5})^n - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot (1 - \sqrt{5})^n}{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n} = \\ &= \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\left| \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right| < 1$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n = 0$. Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

gdzie φ jest złotą liczbą, ciąg (f_n) to ciąg Fibonacciego a równość (1) – to wzór Bineta.

Zadanie 20. (56 OM/I/6)

Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, a_3, \dots$ spełniający równanie

$$(1) \quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych (a_n) spełniający równość (1).

Niech $x_n = \frac{1}{a_n}$. Wówczas ciąg (x_n) jest oczywiście zbieżny do 0 a równanie (1) przyjmuje postać $x_n = x_{n+1} + x_{n+2}$. Wykorzystując równanie $x^2 + x - 1 = 0$ otrzymujemy wzór na dowolny wzór ciągu (x_n)

$$x_n = c_1 \cdot \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

gdzie c_1 i c_2 są pewnymi stałymi wyrażonymi przy pomocy dwóch pierwszych wyrazów x_1, x_2 oraz pierwiastkami równania charakterystycznego.

Ponieważ $\left| \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right| < 1$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n = 0$. Natomiast $\left| \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right| > 1$. Skoro więc ciąg (x_n)

jest zbieżny do 0, to $c_1 = 0$.

Wówczas

$$x_n = c_2 \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Stąd

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ $\frac{a_1}{a_2}$ jako iloraz liczb naturalnych, jest liczbą wymierną, a liczba $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ jest oczywiście niewymierna. Zatem nie istnieje ciąg (a_n) spełniający warunki zadania.

Zadanie 21. ([2])

Dana jest taka liczba naturalna $q > 1$, że $q \equiv 1 \pmod{4}$. Ciąg (a_n) określony jest następująco

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{q-1}{4} a_n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Wykazać, że p jest dzielnikiem a_p wtedy i tylko wtedy, gdy p jest dzielnikiem q .

Rozwiązanie

Zauważmy, że założenie $q \equiv 1 \pmod{4}$ gwarantuje nam, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są całkowite.

Wykorzystując równanie $x^2 = x + \frac{q-1}{4}$ otrzymujemy wzór na dowolny wzór ciągu (x_n) postaci

$$a_n = c_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{q}}{2} \right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{q}}{2} \right)^n.$$

Stąd

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \left(\frac{1-\sqrt{q}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{q}}{2} \right) = 1. \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu są liczby $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{q}}$ i $c_2 = \frac{1}{\sqrt{q}}$.

Wobec tego dla $n = 0, 1, 2, \dots$ mamy

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{q}}{2} \right)^n + \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{q}}{2} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{q}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{q}}{2} \right)^n \right).$$

Wówczas ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2^p a_p &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left(1 + \binom{p}{1} (\sqrt{q})^1 + \binom{p}{2} (\sqrt{q})^2 + \binom{p}{3} (\sqrt{q})^3 + \dots + \binom{p}{p-1} (\sqrt{q})^{p-1} \right. \\ &\quad \left. + \binom{p}{p} (\sqrt{q})^p \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -1 + \binom{p}{1}(\sqrt{q})^1 - \binom{p}{2}(\sqrt{q})^2 + \binom{p}{3}(\sqrt{q})^3 - \dots - \binom{p}{p-1}(\sqrt{q})^{p-1} + \binom{p}{p}(\sqrt{q})^p &= \\
 = 2 \left(\binom{p}{1} + \binom{p}{3}(\sqrt{q})^2 + \binom{p}{5}(\sqrt{q})^4 \dots + \binom{p}{p}(\sqrt{q})^{p-1} \right) &= \\
 = 2 \left(\binom{p}{1} + \binom{p}{3}q + \binom{p}{5}q^2 \dots + \binom{p}{p}q^{\frac{p-1}{2}} \right). &
 \end{aligned}$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc $p \nmid \binom{p}{i}$ dla $p = 1, 2, 3, \dots, p-1$. Ponadto z założenia $p > 2$. Wobec tego

$$p \mid a_p \Leftrightarrow p \mid 2^p a_p \Leftrightarrow p \mid 2 \binom{p}{p} q^{\frac{p-1}{2}} \Leftrightarrow p \mid q^{p-1} \Leftrightarrow p \mid q.$$

Bibliografia:

- [1] Andreescu T., Enescu B., *Mathematical Olympiad Treasures*, Boston 2011.
- [2] Bednarek W., *Zadania z teorii liczb dla olimpijczyków*, Opole 2017.
- [3] Gelza R., Andreescu T., *Putnam and Beyond*, New York 2007.
- [4] Pawłowski H., *Kółko matematyczne dla olimpijczyków*, Toruń 1994.
- [4] https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/problems/om56_1r.pdf
- [5] https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/problems/om59_1r.pdf