

Maciej Kowalczyk

Sławni matematycy

Od początku istnienia ludzkość nieustannie się rozwija, kolejne pokolenia korzystają z wiedzy przodków i dokładają do niej własne odkrycia, osiągnięcia. Budowanie coraz to bardziej zaawansowanych hierarchii społecznych, tworzenie złożonych, zaawansowanych technicznie wynalazków wymusiło na ludzkości rozwój matematyki, która była potrzebna do dalszego rozwoju cywilizacji. Dlatego błędne jest twierdzenie, że matematyka nie jest nam do niczego potrzebna. To właśnie życie wymusiło jej powstanie.

Początkowo matematyka była wykorzystywana do rozwiązywania praktycznych, z naszej perspektywy, prostych problemów. Wiele rozwiązań znajdowano drogą prób, po omacku. Nic więc dziwnego, że były one nieraz niezręczne i wymagały rozwiązania problemów, które przy innym sposobie by nie wystąpiły. Taki stan rzeczy utrzymywał się przez tysiące lat. Przełom nastąpił dopiero w starożytnej Grecji. Dokonania greckich matematyków zapoczątkowały gwałtowny rozwój matematyki, a tym samym innych dziedzin nauki i życia. W czasach antyku stworzono fundamenty, na których opierają się wszystkie późniejsze osiągnięcia ludzkości. Gdyby nie one, niemożliwy byłoby podbój kosmosu, rozwój robotyki, informatyzacja różnych dziedzin życia i wiele innych współczesnych nam osiągnięć. To matematyka sprawiła, że zaszliśmy tak daleko i jedynie dalszy

jej rozwój pozwoli osiągnąć jeszcze więcej. Dlatego uważam, że warto znać historię tej dziedziny nauki oraz wybitne jednostki, które najbardziej wpłynęły na jej rozwój.

Pitagoras (ok. 572-497 p.n.e.)

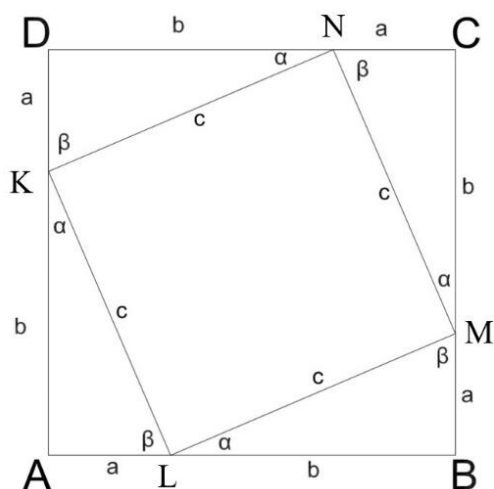
Znaczący wpływ na naukę matematyki zawdzięczamy Pitagorasowi – uczniowi Talesa z Miletu. Pitagoras przyszedł na świat około 572 r. p.n.e. w Samos, w Grecji. Odbił podróże do Egiptu i Babilonii w celu pozyskania wiedzy od tamtejszych mędrców. Uważał się za filozofa (tzn. miłośnika mądrości). Jako matematyk i filozof nie mógł pogodzić się z panującą wtedy w Grecji tyranią Polikratesa, więc przeniósł się do Italii. Tam też w 529 r. p.n.e. w Krotonie założył sławny związek pitagorejski, który, oprócz kwestii naukowych, zajmował się też sprawami religijno-etycznymi oraz polityką. Trudno dziś ustalić, które dokonania pitagorejczyków należy przypisać Pitagorasowi, a które jego uczniom. Bez wątpienia najbardziej znanym osiągnięciem pitagorejczyków jest twierdzenie związane z trójkątem prostokątnym.

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych tego trójkąta.

Dowód:

Z konstrukcji łatwo zauważyć, że czworokąt KLMN jest kwadratem. Długość boku tego kwadratu oznaczmy c , jak na rysunku.



Zauważmy też, że:

Pole kwadratu ABCD wynosi $(a + b)^2$, ale też $4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$,

czyli $(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$,

więc $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

stąd ostatecznie $a^2 + b^2 = c^2$.

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa: *Jeżeli suma kwadratów długości dwóch krótszych boków w trójkącie jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku to ten trójkąt jest prostokątny.*

Trójkąty prostokątne nazywamy pitagorejskimi, jeśli długości ich boków są liczbami naturalnymi. Liczby naturalne a, b, c spełniające warunek $a^2 + b^2 = c^2$ nazywamy liczbami pitagorejskimi. Zauważmy, że jeśli liczby a, b i c są liczbami pitagorejskimi to liczby na, nb i nc , gdzie n jest liczbą naturalną, są nimi również.

Dowód:

Oczywiście, z założenia:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Niech $n \in \mathbb{N}$

$$a^2 + b^2 = c^2 \cdot n^2$$

otrzymujemy

$$a^2 n^2 + b^2 n^2 = c^2 n^2,$$

czyli

$$(an)^2 + (bn)^2 = (cn)^2,$$

a więc liczby an, bn i cn są z definicji pitagorejskie.

Pitagoras podał pewne wzory na liczby pitagorejskie

$$a = 2n + 1$$

$$b = 2n^2 + 2n$$

$$c = 2n^2 + 2n + 1, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N},$$

a także

$$a = 2mn$$

$$b = m^2 - n^2$$

$$c = m^2 + n^2, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N} \text{ i } m > n.$$

Zależności między długościami boków w trójkącie prostokątnym znane były znacznie wcześniej i to w różnych częściach świata. Pitagoras jednak jako pierwszy sformułował w sposób ogólny i udowodnił to twierdzenie. Wykorzystywały je różne cywilizacje, m.in. w budownictwie do wyznaczania kąta prostego.

Euklides (ok. 350-275 p.n.e.)

Uważa się, że Euklides był pierwszym dyrektorem biblioteki w Aleksandrii, założonej przez Ptolemeusza. Miał więc dostęp do wiedzy matematycznej o dużym zasięgu. Około 300 r. p.n.e. napisał dzieło znane powszechnie pt. łacińskim *Elementy*.

Elementy są najdonioślejszym dziełem naukowym świata. Pod względem liczby wydań ustępują, spośród wszystkich książek, jedynie Biblii. Pierwsze drukowane wydanie *Elementów* dokonane zostało w Wenecji w 1482 r. Jest to tłumaczenie łacińskie według z tekstu arabskiego. Opracowanie składa się z 13 ksiąg, systematyzujących wiedzę matematyczną, którą tworzyli wybitni uczeni, począwszy od Talesa z Miletu. Każda z nich rozpoczyna się wyliczeniem definicji, pojęć w niej wprowadzanych. W pierwszej księdze, poświęconej budowie geometrii, zwanej euklidesową, są ponadto postulaty-założenia, z których wyprowadzonych jest na drodze rozumowania ponad ćwierć tysiąca twierdzeń. Postulaty te dotyczą geometrii, ale z nich wywiedzione są dalej również i twierdzenia arytmetyczne.

Uważa się, że geometria euklidesowa była pierwszym systemem aksjomatycznym, czyli takim, w którym wszystkie twierdzenia muszą wynikać z aksjomatów – zdań przyjmowanych z góry za prawdziwe. Aksjomaty w *Elementach* są następujące:

1. *Od dowolnego punktu do dowolnego innego można poprowadzić prostą.*

2. *Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.*
3. *Z dowolnego środka dowolnym promieniem można opisać okrąg.*
4. *Wszystkie kąty proste są równe.*
5. *Jeżeli dwie proste na płaszczyźnie tworzą z trzecią kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych, to te proste, po przedłużeniu, przetną się i to z tej właśnie strony.*

Sformułowania – ograniczona prosta, prosta od punktu do punktu itd. są dla nas „egzotyczne”. Wyjaśnienie mieści się w fakcie, że obowiązywały wówczas twarde reguły filozofii platońsko-arystotelesowskiej, według której nie można było używać pojęcia „całej” prostej, bo była ona nieskończona.

Piąty pewnik (dotyczący równoległości prostych) wywoływał wiele wątpliwości – sam Euklides unikał używania go w swym dziele tak długo, jak to było możliwe. Przez blisko 22 stulecia sądzono, że o wiele bardziej skomplikowany od pozostałych postulatów musi z nich wynikać. Z tego powodu szukano dowodów potwierdzających tę tezę. W XIX w. okazało się, że jest on niezależny od pozostałych, a zastąpienie go innymi daje inne, spójne geometrie. Dotychczas znaną geometrię nazwano euklidesową, a nowe – nieeuklidesowymi, zaś wśród nich pierwszymi były geometria hiperboliczna oraz eliptyczna.

Archimedes (ok. 287-212 p.n.e.)

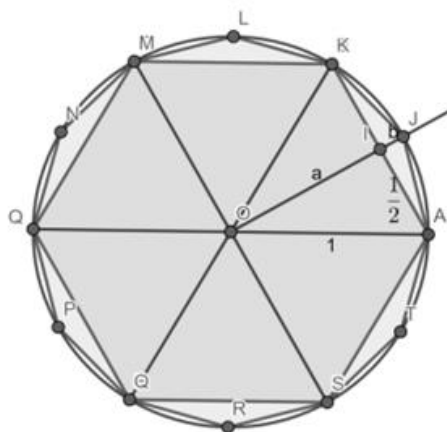
Urodził się w Syrakuzach na Sycylii. Zajmował się m.in. matematyką, fizyką i filozofią. Wiedzę zdobywał w Aleksandrii, gdzie znajdowała się największa w czasach antycznych biblioteka. Jego ojciec – Fidiasz, zajmował się astronomią. Prawdopodobnie był też krewnym władcy Syrakuz – Hierona II. Jest uznawany za najwybitniejszego matematyka starożytności.

Archimedes znany jest również z konstrukcji machin wojennych, które były używane przy obronie Syrakuz w czasie drugiej wojny punickiej. Podobno stworzył też broń, która podpalała statki. Według niektórych legend bronią tą miało być lustro o bardzo dużej powierzchni, które skupiając promienie słoneczne

w jednym punkcie, powodowało wzrost temperatury, a w konsekwencji zapłon statku. Mimo długich starań rzymskiej armii Syrakuzy zostały zdobyte dopiero na skutek zdrady części arystokracji. Archimedes został zabity przez rzymskich żołnierzy po zdobyciu miasta, mimo wyraźnego rozkazu, aby ująć go żywego. Według legendy Archimedes zginął z ręki rzymskiego legionisty w trakcie rozwiązywania problemu matematycznego. Tuż przed śmiercią, zapytany, kim jest, Archimedes miał ponoć powiedzieć „noli turbare circulos meos”, co znaczy „nie zamazuj moich kół”.

Historia życia Archimedesza wiąże się z procesem podboju greckich miast rejonu Morza Śródziemnego przez republikę rzymską. Rzymianie, niszcząc i grabiąc zdobywane miasta i obciążając je podatkami, spowodowali stagnację kultury i filozofii hellenistycznej oraz upadek greckiej nauki, po którym już nigdy nie wróciła do dawnego stanu. Zarazem zdobywcy zachowali ogromny szacunek dla greckich osiągnięć, z których niejednokrotnie korzystali. Nie potrafiono już jednak osiągnąć dawnego greckiego poziomu rozumowań. Symbolem tego wszystkiego jest właśnie śmierć Archimedesza – zabitego przez rzymskiego legionistę w chwili roztrząsania jakiegoś problemu matematycznego, a następnie z honorami pochowanego przez rzymskiego wodza.

Jednym z największych osiągnięć Archimedesza było bardzo dokładne przybliżenie liczby π . Udało mu się oszacować, że $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Aby ograniczyć π z dołu zaczął od wpisania w okrąg sześciokąta foremnego. Przyjmijmy długość boku 1, wówczas średnica okręgu wynosi 2, natomiast obwód sześciokąta jest równy 6. Zatem $\pi > \frac{6}{2} = 3$. Następnie Archimedes



policzył długość boku dwunastokąta wpisanego w okrąg.

Jeśli ze środka okręgu poprowadzimy półprostą przechodzącą przez środek boku AK , to półprosta przetnie w połowie łuk AK .

Odcinek AI to połowa boku wielokąta, a więc $\frac{1}{2}$.

Z tw. Pitagorasa $a = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$,

$$b = 1 - a, \quad AJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2}.$$

AJ jest długością boku dwunastokąta.

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy $AJ = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0,5176$.

Zatem $\pi > \frac{12}{2} \cdot AJ = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 3,1058$

Analogiczną operację Archimedes powtórzył jeszcze trzy razy dla 24-kąta, 48-kąta i ostatecznie - dla 96-kąta. Otrzymany przez niego rezultat to $3\frac{10}{71} \approx 3,1408$. Jest on bardzo imponujący biorąc pod uwagę, że musiał on wszystko liczyć ręcznie, posługując się dużo mniej wygodną notacją matematyczną, niż obecną współcześnie (przy pomocy kalkulatora można łatwo sprawdzić, że dla 96-kąta otrzymujemy przybliżenie $\pi > 3,1410$).

Ograniczenie z góry przebiega podobnie z tym, że, zamiast wpisując w okrąg wielokąty, opisujemy na okręgu kolejne wielokąty.

Fibonacci (ok. 1175-1250)

Leonardo Fibonacci, zwany Leonardem z Pizy, urodził się około 1175 r. w Pizie. Sam często używał imienia Bigollo, znaczące mniej więcej: „nic niewart” lub „podróżny”. Jego ojciec był dyplomatą w Afryce północnej. Reprezentował on kupców Republiki Pizy.

Młody Fibonacci uczył się w Bouzia pod kierunkiem arabskiego nauczyciela. Już w dzieciństwie zwiedził wiele krain, m.in. Egipt, Syrię, Prowansję,

Grecję. Poznawał w nich różne systemy matematyczne. W 1200 r. wrócił do Pizy. Tam zajął się opracowywaniem wielu zagadnień starożytnej matematyki.

Fibonacci miał duży wkład w upowszechnienie w Europie arabskich i azjatyckich osiągnięć matematycznych. Jego zasługą jest wprowadzenie liczb arabskich do Europy. Mimo to najbardziej znany tzw. liczby Fibonacciego. Jest to specyficzny ciąg liczb naturalnych, w którym każdy kolejny wyraz stanowi sumę dwóch poprzednich. Ciąg ten można rekurencyjnie przedstawić w następujący sposób:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0, \\ 1 & \text{dla } n = 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Pierwsze dwadzieścia wyrazów ciągu Fibonacciego to kolejno:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181

Z ciągiem Fibonacciego jest bezpośrednio związana tzw. złoty podział. Jest to podział odcinka na dwie części tak, by stosunek długości dłuższej z nich do krótszej był taki sam, jak całego odcinka do części dłuższej.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Stosunek ten nazywany jest złotą liczbą. Oznacza się go grecką literą φ . Złoty podział wykorzystuje się często w estetycznych, proporcjonalnych kompozycjach architektonicznych, malarskich, fotograficznych, a nawet w muzyce. Znany był już w starożytności i przypisywano mu wyjątkowe walory estetyczne. Stosowano go np. w planach budowli na Akropolu. Matematycy, poczynając od Euklidesa, badali złoty podział z powodu jego wyjątkowych i interesujących własności. Złoty podział jest także używany w analizie rynków finansowych.

Okazuje się, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

Dowód (przy założeniu, że taka granica istnieje)

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Zatem otrzymaliśmy $x = 1 + \frac{1}{x}$.

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Gdy za $\frac{a}{b}$ podstawimy x otrzymamy $x = 1 + \frac{1}{x}$, zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

Rozwiążmy jeszcze równanie $x = 1 + \frac{1}{x} \cdot x$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Odrzucamy rozwiązanie ujemne i dostajemy $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887 \dots$

Czasami tym samym terminem określa się liczbę odwrotną:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618033989.$$

Co ciekawe $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

Pierre Fermat (1601 – 1665)

Pierre Fermat był z wykształcenia i zawodu prawnikiem. Prawo studiował na uniwersytecie w Tuluzie oraz Orleanie. Od 1631 r. do końca życia pełnił funkcję radcy prawnego parlamentu (dawna nazwa sądu) w Tuluzie. Późno zainteresował się matematyką. Była ona dla niego pasją i poświęcał jej jedynie czas wolny. Znał również wiele języków: łacinę, starogrecki, hiszpański, włoski oraz francuski. Chętnie czytał oryginalne wydania dzieł matematycznych Euklidesa,

Archimedesesa i innych starożytnych uczonych. Na marginesach tych książek często zapisywał własne spostrzeżenia. W ten sposób podał wiele twierdzeń, które w większości nie były jednak rygorystycznie udowodnione. Osobiście Fermat opublikował niewiele swych prac. Większość znalazła się w korespondencji ze współczesnymi mu francuskimi matematykami: Blaisem Pascalem, René Descarteselem oraz Marinem Mersennem. Jego pozostałe prace zostały zebrane i wydane przez najstarszego syna, Samuela.

Do jego największych osiągnięć należy zaliczyć stworzenie metody znajdowania ekstremów funkcji algebraicznych oraz rozwój geometrii analitycznej (m.in. wprowadzenie metody współrzędnych). Ponadto, razem z Pascalem, wypracował podstawy rachunku prawdopodobieństwa. Jednakże największą sławę Fermat zawdzięcza dwóm twierdzeniom, związanym w teorią liczb.

Małe twierdzenie Fermata odnosi się do problemu podzielności liczb.

MTF: *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi $p|n^p - n$.* Czasami formułuje się je również w taki sposób: *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, a liczba n jest taką liczbą całkowitą, że liczby p i n są względnie pierwsze, to $p|n^{p-1} - 1$*

Dowód (indukcyjny)

1) Dla $n = 1$ mamy $p|0$, co jest prawdziwe dla dowolnej liczby p .

2) $T(k) \Rightarrow T(k + 1)$

Z: $n^p \equiv n \pmod{p}$

T: $(n + 1)^p \equiv n + 1 \pmod{p}$

Dowód:

Zauważmy najpierw, że dla $0 < k < p$, zachodzi $p|\binom{p}{k}$, ponieważ:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \dots \cdot (p-(k-1))}{k!}$$

p jest liczbą pierwszą, więc w mianowniku nie występują jej dzielniki. Ponieważ symbol Newtona przyjmuje wartości całkowite p musi występować w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $\binom{p}{k}$. Zatem p jest dzielnikiem $\binom{p}{k}$.

Wobec tego:

$$L = (n + 1)^p = n^p + \binom{p}{1}n^{p-1} + \binom{p}{2}n^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}n + 1 \\ \equiv n^p + 1 \pmod{p}$$

Uwzględniając założenie indukcyjne otrzymujemy:

$$(n + 1)^p + n^p \equiv n^p + 1 + n \pmod{p} \\ (n + 1)^p \equiv n + 1 \pmod{p}$$

Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n i liczby pierwszej p prawdziwa jest podzielność $p|n^p - n$.

O ile małe twierdzenie Fermata stosunkowo szybko przestało być tajemnicą to wielkie twierdzenie Fermata pogłężyło w otchłani frustracji świat matematyczny na trzy i pół wieku. Zapis na marginesie powiększa jeszcze tę frustrację: Fermat pisze, że zna dowód, ale nie zamieszcza go z braku miejsca. Słynne twierdzenie jest sformułowane w bardzo prosty sposób. Wszyscy znamy tzw. liczby pitagorejskie – trójki liczb całkowitych x, y, z spełniające równanie Pitagorasa:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Wielkie twierdzenie Fermata mówi, że dla liczb całkowitych $n > 2$ równanie

$$a^n + b^n = c^n$$

nie ma rozwiązania.

Obecnie uważa się, że Fermat pisząc o swoim dowodzie miał prawdopodobnie na myśli dowód dla konkretnych wartości n , np. $n = 3$ lub $n = 4$, ale najprawdopodobniej był bardzo daleko od dowodu ogólnego. O ten ostatni rozegrała się 350-letnia batalia. Wielokrotnie pojawiali się zwycięzcy, ale ich dowody zawsze okazywały się niekompletne. Dowód pojawił dopiero niedawno. Latem 1993 r., Andrew Wiles z Uniwersytetu Princeton, przedstawił serię trzech wykładów, 200-stronicową dysertację i... po prawie dwuletnich rozważaniach świat matematyków wydał westchnienie ulgi. Dokonało się. Ale myślę, że gdzieś tam

jeszcze długo pozostanie cię podejrzenia: czy rzeczywiście Fermat nie miał lepszego pomysłu na udowodnienie wielkiego twierdzenia 350 lat wcześniej?

Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler znalazł się w świecie wielkich matematyków przez szczęśliwy przypadek. Jego ojciec, protestancki duchowny z okolic Bazylei, wysłał syna na tamtejszy uniwersytet, aby studiował teologię. Na uniwersytecie, 13-letni Leonard zetknął się z Janem Bernoullim i zaprzyjaźnił z jego dwoma synami – Davidem i Mikołajem. Zamiast teologii skończył studia matematyczne mając zaledwie 16 lat, a już w trzy lata później otrzymał pierwszą z wielu nagród Szwajcarskiej Akademii. Tematem jego pracy była optymalizacja układu masztów na żaglowcach.

Euler szybko opuścił rodzinny kraj. W 1724 r., caryca Katarzyna I, organizowała Akademię w Sankt Petersburgu. Spośród kandydatów, posady znaleźli tam młodzi Bernoulli, dzięki którym trafił tam także Leonhard, któremu Uniwersytet w Bazylei odmówił objęcia katedry fizyki z powodu jego młodego wieku.

W 1741 r., Euler przyjął ofertę Fryderyka Wielkiego i stał się szefem matematyków w Berlińskiej Akademii – ośrodku, który miał nieporównywalnie większą renomę niż Akademia carska. W Berlinie spędził 25 lat, po czym wrócił do Petersburga. Skłoniły go do tego interesujące warunki finansowe oraz niekorzystne relacje z pruskim władcą.

W 1735 r. Euler przeszedł bardzo poważną gorączkę, czego konsekwencją była prawie całkowita utrata wzroku w jednym oku. W późniejszym okresie Euler cierpiał zaś na kataraktę w drugim, dotychczas zdrowym; doprowadziła go ona już w kilka tygodni po jej odkryciu do niemal całkowitej ślepoty. Mimo tych kłopotów zdrowotnych wydajność Eulera w jego pracy spadła tylko w niewielkim stopniu – kłopoty ze wzrokiem rekompensował swoją fotograficzną pamięcią i umiejętnością dokonywania skomplikowanych obliczeń w pamięci. Był na przykład zdolny do powtórzenia bez najmniejszego wahania słowo

w słowo Eneidy Wergiliusza, co więcej: był w stanie wskazać jakim wersem zaczyna się i jakim kończy dowolna stronica tej książki.

Euler wniósł wkład do niemal wszystkich ówczesnych dziedzin matematyki – geometrii, rachunku różniczkowego i całkowego, trygonometrii, algebry, teorii liczb. Trudno jest znaleźć matematyka, który wydał podobną liczbę dzieł, z których wiele miało kluczowe znaczenie dla rozwoju matematyki.

Światową sławę przyniosło Eulerowi rozwiązanie problemu bazylejskiego. Polegał on na znalezieniu sumy odwrotności kwadratów wszystkich liczb naturalnych.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler odkrył też inną ciekawą własność, związana z sumą odwrotności liczb naturalnych.

Twierdzenie

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} \cdot \dots, \text{ gdzie } s \text{ jest dowolną liczbą naturalną.}$$

Dowód:

Niech

$$(1) \quad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \dots$$

Pomnóżmy obie strony tego wyrażenia przez $\frac{1}{2^s}$.

$$(2) \quad \frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \frac{1}{14^s} + \dots$$

Odejmując (2) od (1) otrzymujemy:

$$(3) \quad \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \dots$$

Teraz pomnóżmy obie strony przez $\frac{1}{3^s}$.

$$(4) \quad \frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} + \frac{1}{39^s} + \dots$$

Odejmując (4) od (3) otrzymujemy:

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \dots$$

Po wykonaniu analogicznych operacji dla $\frac{1}{5^s}$ z nieskończonego szeregu po prawej stronie znikną wszystkie wielokrotności 5. Przypomina to trochę tzw. sito Eratostenesa. Nietrudno zauważyć, że przy ciągłym powtarzaniu tej operacji otrzymamy:

$$\dots \left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1$$

Zatem

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \dots}$$

czyli

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \dots}$$

Po prawej stronie tej równości mamy iloczyn nieskończenie wielu czynników, w których pojawiają się kolejno wszystkie liczby pierwsze – podniesione do potęgi $-s$ – a po lewej znajduje się suma nieskończenie wielu składników zawierających kolejno wszystkie liczby naturalne – podniesione do potęgi s . W ten sposób po raz pierwszy udało się powiązać zbiór wszystkich liczb pierwszych z czymś prostszym i bardziej regularnym.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Urodził się w biednej rodzinie pomocnika murarskiego w Brunszwiku. Jako mały chłopiec nauczył się czytać, a także samodzielnie opanował proste rachunki. Jak sam twierdził, nauczył się rachować zanim jeszcze zaczął mówić. Jego geniusz matematyczny objawił się stosunkowo wcześnie w szkole. Popularna jest anegdota, wedle której nauczyciel małego Gaussa chcąc zająć swoich uczniów na dłuższy czas polecił im zsumować wszystkie liczby od 1 do 100. Wielkie było jego zdziwienie, gdy jeden z uczniów podał prawidłowy wynik po zaledwie kilku

minutach. Gauss zauważył, że liczby od 1 do 100 można połączyć w pary $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, ... $50 + 51 = 101$. Takich par będzie 50, zatem szukaną sumą jest $50 \cdot 101 = 5050$.

Uzdolnionym chłopcem zainteresował się książę Brunszwiku – Karol Wilhelm Ferdynand, który postanowił sponsorować jego dalszą naukę. Gauss dwa lata spędził w Collegium Carolinum w Brunszwiku, gdzie korzystając z dobrze zaopatrzonej biblioteki samodzielnie zapoznał się z dziełami Eulera, Lagrange’a oraz Newtona. Później studiował matematykę na uniwersytecie w Getyndze, który jednak opuścił po trzech latach, nie uzyskując dyplomu. Ostatecznie uzyskał stopień doktora, przedstawiając pracę, w której pokazał pierwszy ścisły dowód twierdzenia zasadniczego algebry. W 1807 r. został profesorem uniwersytetu w Getyndze i funkcję tę pełnił aż do śmierci.

Gauss zajmował się różnymi działami matematyki i jej zastosowaniami w innych dziedzinach. Był uznanym autorytetem w całej Europie, a jemu współcześni zwali go „księciem matematyków”.

Publikował raczej niechętnie. Wiele jego przemyśleń zachowało się w formie listów, notatek i zapisków. Niektóre z jego odkryć poznano dopiero później, gdy inni naukowcy, pracując niezależnie, ogłaszali wyniki swoich prac. Pierwsze publikacje Gauss wydał z poczucia obowiązku wobec swojego patrona, księcia Karola Wilhelma.

Gaussowi zawdzięczamy chociażby współczesną notację liczb zespolonych. Zinterpretował je on również geometrycznie na płaszczyźnie. Liczba zespolona to obiekt postaci $x + iy$, gdzie x, y są liczbami rzeczywistymi, natomiast $i^2 = -1$.

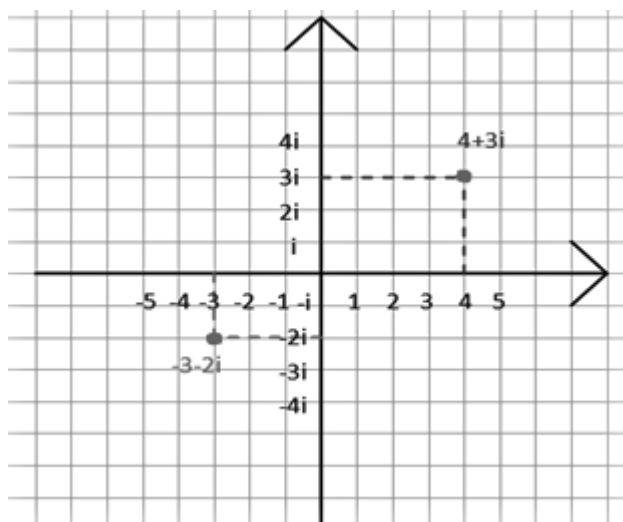
Każdą liczbę rzeczywistą można jednoznacznie powiązać z punktem na osi liczbowej – jej większą lub mniejszą wartość łatwo kojarzymy z przesuwaniem się w lewo i prawo na osi.

Liczbie zespolonej $x + iy$ można natomiast przypisać punkt płaszczyzny. Wystarczy odłożyć wartość x na osi poziomej (zwanej osią rzeczywistą) oraz y na

osi pionowej (zwanej urojoną). Można powiedzieć, że liczba zespolona jest tworem jak gdyby „dwuwymiarowym”: gdy porównujemy dwie takie liczby, jedna może być od drugiej większa ze względu na swoją część rzeczywistą, ale jednocześnie mniejsza ze względu na swoją część urojoną. Liczby zespolone można bez problemów dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Okazuje się (choć wymaga to już nieco więcej pomysłowości), że wykonalne jest nawet potęgowanie.

Bernhard Riemann (1826-1866)

Dom, w którym wychowywał się Riemann, tworzyli jego ojciec Friedrich Bernhard Riemann, będący pastorem luterańskim, oraz matka Charlotte. Bernhard był drugim dzieckiem w rodzinie, miał także cztery siostry i brata. Niestety, poza jego siostrą Idą, wszyscy, włącznie z matką, umarli w młodym wieku. Nadzwyczaj niesprzyjające warunki domowe, choroby rodzeństwa, mały krąg znajomych, zła dieta, były codziennością podczas dojrzewania Bernharda, jednakże nie wpłynęły na jego postrzeganie rodziny. Paradoksalnie, Bernhard często tęsknił za rodzinnym domem i źle się czuł, będąc z dala od niego. Był przy tym niezwykle nieśmiały i unikał kontaktów, ograniczając je w zasadzie wyłącznie do tych



rodzinnych lub zawodowych. Riemann często chorował, jego zdrowie było wyniszczone ubogim życiem.

Naukę rozpoczął z czteroletnim opóźnieniem w wieku 14 lat w Hanowerze, z dala od rodzinnego domu. Do nauki w tym miejscu zmusiła go sytuacja finansowa. Zakwaterowanie, które zapewniała mu tam babcia pozwalało na oszczędności. Nie czuł się tam dobrze, gdyż odczuwał tęsknotę za domem. Sytuacja odmieniła się, kiedy po śmierci babci został przeniesiony do Luneburga, położonego bliżej rodzinnej miejscowości. To spowodowało, że późniejsze lata były dla niego szczęśliwsze.

Czy Bernhard Riemann był dobrym uczniem? Bez wątplenia posiadał znakomitą pamięć, ale wykorzystywał ją raczej do rzeczy, znajdujących się w kręgu jego zainteresowań – głównie matematyki. Był perfekcjonistą, co zdecydowanie pomagało mu w jego badaniach. W 1846 r. wstąpił na wydział teologii uniwersytetu w Getyndze. Miał pójść w ślady ojca. Na uniwersytecie Riemann spotkał wspomnianego już wcześniej Carla Friedricha Gaussa, na wykłady którego Bernhard zaczął regularnie uczęszczać. Wkrótce zmienił plany dotyczące przyszłości i rozpoczął studia matematyczne, jednakże wykazywał też wielkie zainteresowanie fizyką oraz filozofią. Swoje matematyczne wizje widział bowiem w szerszym, filozoficznym kontekście. Riemann, jako obiecujący matematyk, niebawem przeniósł się do Berlina. Spędził tam dwa lata pod okiem największych matematycznych umysłów w kraju.

Po powrocie do Getyngi w 1849 r., Bernhard rozpoczął pracę nad dysertacją doktorską dotyczącą teorii liczb, którą dwa lata później obronił. Został wykładowcą w Getyndze, a następnie profesorem nadzwyczajnym. Była to jego pierwsza praca na stałym etacie. W 1857 r. opublikował pracę z analizy, stanowiącą wielki wkład w tę dziedzinę, a której tytuł to „*Theorie der Abel'schen Functionen*” („Teoria funkcji abelowych”). W ciągu dwóch lat zapewniła mu renomę w Europie i posadę profesora w Getyndze. Bernhard Riemann często też podróżował do

Włoch w ramach urlopów uniwersyteckich. Często jednak chorował, zaś w końcu – zmarł na gruźlicę dnia 20 lipca 1866 r. we Włoszech.

Bernhard Riemann opublikował stosunkowo nieliczne prace, jednak wpłynęły one na rozwój nauki, zwłaszcza matematyki, ponieważ każda z nich zawierała nowatorskie idee. Świadczy o tym wielka liczba twierdzeń i metod matematycznych, nazwanych od nazwiska Riemanna dla upamiętnienia jego wkładu. Przykładem może być twierdzenie Riemanna-Lebesgue’a, powierzchnia Riemanna, całka Riemanna, rozmaitość riemannowska i rozmaitość pseudoriemannowska, hipoteza Riemanna, równania Cauchy’ego-Riemanna, tensor krzywizny Riemanna i inne.

Chciałbym omówić zainicjowaną przez niego jedną z największych, nierozwiązanych zagadek matematyki. Znalazła się ona w krótkim, zaledwie dziewięciostronicowym artykule pt. „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse” („O ilości liczb pierwszych mniejszych od danej wielkości”), ogłoszonym w 1859 r. Jak się później okazało była to jego jedyna publikacja dotycząca teorii liczb, ale to wystarczyło, by na zawsze odmienić oblicze tej dziedziny matematyki.

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

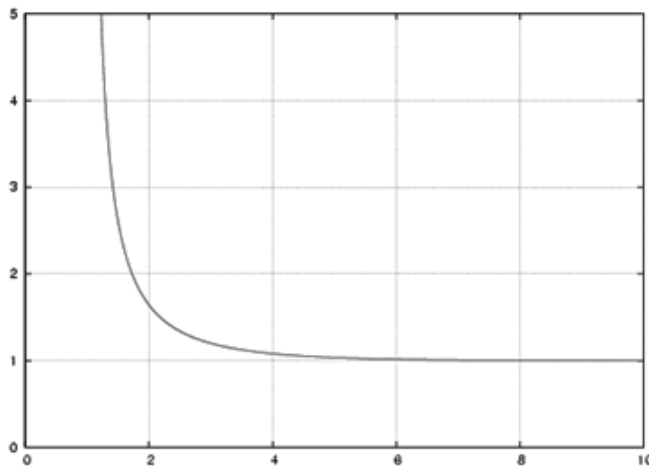
Riemann zajął się badaniem powyższej funkcji. Jest ona oznaczana szóstą literą greckiego alfabetu ζ (wym. dzeta). Zobaczmy jakie przyjmuje ona wartości dla przykładowych argumentów s .

s	$\zeta(s)$
2	$\frac{\pi^2}{6} \sim 1,665$
3	1,202 ...
4	$\frac{\pi^4}{90} \sim 1,082$

5	1,036 ...
6	$\frac{\pi^6}{945} \sim 1,017$

Wartości $\zeta(s)$ dla s parzystych do $s = 26$ obliczył Leonhard Euler (przypadek dla $s = 2$ był słynnym problemem bazylejskim). Dla s nieparzystych znamy jedynie przybliżone wartości.

Dlaczego nie zacząłem od 1? Wtedy $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$. Jest to powszechnie znany w matematyce szereg harmoniczny. Jest on rozbieżny, tzn. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$.



Źródło: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9915005>

Funkcja $\zeta(s)$ ma dwie asymptoty: pionową $x = 1$ oraz poziomą $y = 1$. A co z wartościami $s < 1$? Weźmy $s = \frac{1}{2}$ wówczas szereg ma postać: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$. Każdy jego wyraz począwszy od $\frac{1}{\sqrt{2}}$ jest większy od odpowiadającego mu wyrazu szeregu harmonicznego, wobec tego ten szereg również jest rozbieżny. Gdy $s = 0$ mamy $\zeta(s) = \frac{1}{1^0} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{3^0} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$.

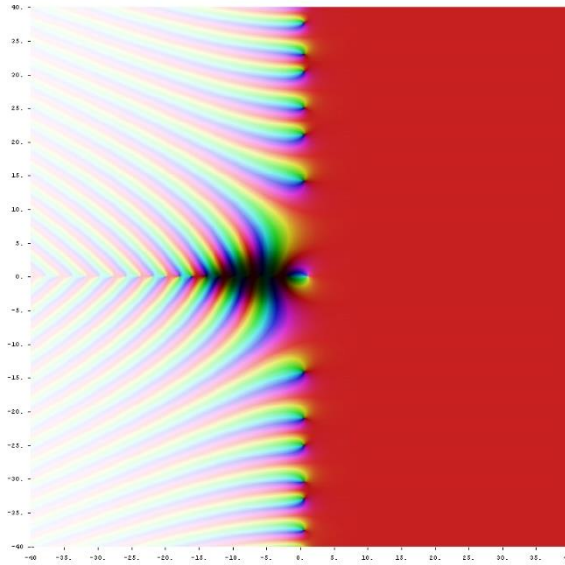
Dla $s = -1$ mamy $\zeta(s) = \frac{1}{1^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \dots = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$

Mogło by się zatem wydawać że dziedziną funkcji dzeta jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od 1. Przy naszych dotychczasowych założeniach faktycznie tak jest, jednak Riemann spojrzął na problem z szerszej perspektywy. Rozszerzył on dziedzinę funkcji do liczb zespolonych.

Niestety, dla liczb zespolonych, podobnie jak w przypadku liczb rzeczywistych, funkcja dzeta Riemanna ma sens tylko dla części rzeczywistej $s > 1$. Riemann poradził sobie z tym problemem rozszerzając analitycznie jej dziedzinę do całego zbioru liczb zespolonych. Proces ten polega na znalezieniu alternatywnego wzoru na funkcję, który będzie miał sens dla wszystkich liczb zespolonych i jednocześnie redukował się do wzoru Eulera w momencie, gdy ma on sens. Proces rozszerzania dziedziny jest bardzo skomplikowany, dlatego od razu podam wzór funkcji, jaki otrzymujemy:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cdot (k+1)^{-s}$$

Dziedziny nie udało się rozszerzyć na tylko jeden punkt płaszczyzny liczb zespolonych $s(1,0)$, więc dla liczby rzeczywistej 1. Jak narysować wykres takiej funkcji? Do narysowania dziedziny potrzebujemy dwóch wymiarów, podobnie jest ze zbiorem wartości funkcji zespolonej. Razem są to cztery wymiary. Nie jesteśmy zatem w stanie narysować go w standardowy sposób. Jedną z metod na narysowanie takiego wykresu jest „kolorowanie dziedziny”. Polega ona na tym, że na płaszczyźnie rysujemy dziedzinę funkcji zespolonej (oś OX odpowiada za część rzeczywistą, a oś OY za część urojoną liczby zespolonej). Następnie tą samą płaszczyznę nanosimy kolory, których odcień oraz jasność odpowiadają konkretnym wartościom funkcji. Będą nas interesowały miejsca zerowe – są one czarnymi kropkami. Mają one również to do siebie, że spotykają się w nich wszystkie kolory.



Źródło: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2509981>

Riemann podzielił miejsca zerowe funkcji dzeta na dwa rodzaje. Te, które leżą na osi OX, a więc są liczbami rzeczywistymi, nazywamy zerami trywialnymi. Są to kolejne parzyste liczby ujemne ($-2, -4, -6 \dots$). Riemann wyliczył cztery miejsca zerowe, które nie leżały na osi OX. Okazało się, że wszystkie leżały na jednej prostej równoległej do osi OY i przecinającej oś OX w $\frac{1}{2}$. Prostą tą nazwano linią krytyczną. Mamy już wszystkie niezbędne informacje, aby sformułować słynną hipotezę Riemanna.

Hipoteza Riemanna

Wszystkie nietrywialne miejsca zerowe funkcji ζ leżą na linii krytycznej. Wcale nie była to dla niego najważniejsza część pracy. W kilku pierwszych próbach nie udało mu się jej udowodnić, więc stwierdził, że jeszcze kiedyś do niej wróci (tak się jednak nie stało). Dowód ten nie był mu zresztą potrzebny w dalszych rozważaniach i wciąż – po 162 latach – pozostaje zagadką. Wiemy, że wszystkie nietrywialne miejsca zerowe funkcji dzeta mają część rzeczywistą $0 < x < 1$. Godfrey

Harold Hardy i John Edensor Littlewood udowodnili, że istnieje nieskończenie wiele miejsc zerowych funkcji dzeta na prostej krytycznej. Zostało również udowodnione, że przynajmniej 40% miejsc zerowych leży na prostej krytycznej.

Jest to jeden z problemów milenijnych, ogłoszonych przez Instytut Matematyczny Claya w 2000 r. Clay Mathematics Institute (CMI) ufundował nagrodę w wysokości miliona dolarów za dowód lub obalenie tej hipotezy. Hipoteza Riemanna jest również ósmym problemem z listy problemów Hilberta.

Dlaczego zatem hipoteza Riemanna jest tak ważna? Riemann, definiując funkcję dzeta, chciał jeszcze dokładniej przybliżyć funkcję $\pi(n)$ – ilość liczb pierwszych nie większych od n . Okazuje się, że stosując pewne poprawki, związane z nietrywialnymi miejscami zerowymi funkcji dzeta, można bardzo dokładnie określić ilość liczb pierwszych w danych zakresach. Dowód hipotezy Riemanna rzuciłby światło na temat skąd wzięło się rozmieszczenie nietrywialnych miejsc zerowych funkcji dzeta, a więc również rozmieszczenie liczb pierwszych.

Wpływ hipotezy Riemanna wykracza jednak poza teorię i zastosowania liczb pierwszych. Przykładowo, znane są dosłownie setki twierdzeń, wynikających z prawdziwości tzw. uogólnionej hipotezy Riemanna (GRH). Jej dowód automatycznie zamykałby kwestię wielu innych matematycznych zagadek. Do najbardziej znanych z nich należy tzw. słaba zasada Goldbacha, w myśl której każdą liczbę nieparzystą od 7 wzwyż da się zapisać jako sumę trzech liczb pierwszych (np. $9 = 3 + 3 + 3 = 2 + 2 + 5$).

Wskazówki bibliograficzne:

Opracowania

- Derbyshire J., *Obsesja liczb pierwszych*, tłum. R. Kirwiel, M. Kulas, Poznań 2009.
- *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*, t. 1-3, red. A. P. Juskiewicz, tłum. S. Dobrzycki, Warszawa 1975-1977.

- Merzbach U. C., Boyer C. B., *A History of Mathematics*, Hoboken 2011.
- Прасолов В. В., *История математики*, t. 1-2, Moskwa 2018-2019.
- Рыбников К. А., *История математики*, t. 1-2, Moskwa 1960-1963.

Strony internetowe

- <http://www.ftj.agh.edu.pl/~lenda/cicer/cyklop.htm>
- <http://www.ftj.agh.edu.pl/~lenda/cicer/node8.htm>
- <https://eszkola.pl/matematyka/leonardo-fibonacci-4869.html>
- <https://fizyka.uniedu.pl/archimedes/>
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Ci%C4%85g_Fibonacciego
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Hipoteza_Riemanna,
- <https://www.mimuw.edu.pl/~mrp/TI/Materialy/gauss>
- <https://www.wielkiepytania.pl/article/krolowa-hipotez/>
- https://www.youtube.com/watch?v=_rJdkhlWZVQ